12-12-18

...de aprobación es al menos el 50% de la práctica y al menos el 50% de la teórica.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota
M	[illegible]	R-/B	R/R	B/M	M	[illegible]

La condición mínima de aprobación es dos prácticos y un teórico correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 En una empresa se sabe que el consumo telefónico tiene distribución normal y que su promedio histórico es de 2520 pulsos mensuales. El gerente considera que debido al uso de los celulares el promedio de pulsos de línea ha bajado. Propone para contestar a esta cuestión un test de hipótesis basado en una muestra de los últimos 12 meses que le facilita su asistente:

2477 2443 2748 2662 2531 2578 2744 2301 2049 2237 2198 2602

a) ¿Cuál es la conclusión del gerente a nivel 0.05?

b) Cinco años después el gerente quiere rehacer la misma prueba de hipótesis con los datos de los 5 años previos. Le pide a su asistente que le facilite los datos y éste (como ya era la hora de retirarse) decide darle los mismos datos que le dio cinco años atrás pero repetidos cinco veces. Si el gerente rehace el test con ésos datos, ¿qué conclusión obtendrá al mismo nivel que antes?

Ejercicio 2 Se diseña un ascensor de carga cuyo límite es 1000 kg. El peso de cada caja sigue una distribución normal con un peso medio de 32 kg y un desvío estándar de 10 kg.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 30 cajas exceda el límite de carga?

b. Se toma una muestra aleatoria simple de 2 cajas ¿cuál es la probabilidad de que el mínimo de la muestra sea inferior a 30kg?

Ejercicio 3 Sea X(mm) una variable aleatoria que describe la profundidad de un disparo. Su función de densidad de probabilidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x^{-1} & c \leq x \leq c+2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

a) Indicar si los eventos $\{x/x > c+1\}$ y $\{x/x < c+1.5\}$ son independientes.

b) Si el diámetro de la perforación del disparo Y en mm, se puede definir como $Y = 10X + 1$, hallar el valor del diámetro esperado.

Ejercicio 4 La siguiente información resultó de un estudio realizado para examinar la relación entre una medida de la corrosión del acero y la concentración de $NaPO_4$.

X	corrosión	7,68	6,95	6,30	5,75	5,01	1,43	0,93	0,72	0,68	0,65	0,56
Y	$NaPO_4$	2,5	5,03	7,6	11,6	13,0	19,6	26,2	33,0	40,0	50,0	55,0

a) Estime el modelo lineal para explicar la corrosión conociendo el nivel de $NaPO_4$. Indique los supuestos del modelo.

b) Estime el coeficiente de determinación e interprételo en el contexto del problema.

Terico 1 a) Defina eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes. Ejemplifique

b) Demuestre que si dos eventos son independientes también lo son sus complementos.

Terico 2 Defina la distribución exponencial, halle su valor esperado y explique la relación con la distribución de Poisson.

Probab. y Est. UTN Final

12-12-18

① En una empresa se sabe que el consumo telefónico tiene distribución normal y que su promedio histórico es de 2520 pulsos mensuales. El gerente considera que debido al uso de los celulares el promedio de pulsos de línea ha bajado. Propone para contestar a esta cuestión un test de hipótesis basado en una muestra de los últimos 12 meses que le facilita su asistente.

2477 2443 2748 2662 2531 2578 2744 2301 2049 2232 2198 2602

a) ¿Cuál es la conclusión del gerente a nivel 0,05?

$n = 12$
$\bar{X} = 2464,17$
$S = 224,92$
$\alpha = 0,05$
Varianza desconocida

es lo que dice el gerente

$H_0: \mu = 2520$ vs $H_1: \mu < \underbrace{2520}_{\mu_0}$

$e_m = \dfrac{\bar{X} - 2520}{224,92/\sqrt{12}} = \dfrac{\bar{X} - 2520}{64,93} \sim N(0,1)$ bajo H_0

Rechazo si $t_{obs} < t_{11,\,0.05}$

$t_{obs} = \dfrac{2464,17 - 2520}{64,93} = -0,85987$

$t_{11,\,0.05} = 1,796$

$t_{obs} < t_{11,\,0.05} \Rightarrow$ Rechazo H_0

Basado en la muestra, el gerente ratifica su consideración (que el promedio de pulsos de línea bajó)

b) Cinco años después el gerente quiere rehacer la misma prueba de hipótesis con los datos de los 5 años previos. Le pide a su asistente que le facilite todos los datos (como ya era la hora de retirarse) decide darle los mismos datos que le dio cinco años atrás pero repetidos cinco veces. Si el gerente rehace el test con estos datos ¿qué conclusión obtendrá al mismo nivel que antes?

1° conclusión: el asistente es un irresponsable

2° conclusión: si le pide 5 datos y le entrega 60, concluiría que le están dando cualquier información. $(12 \times 5 = 60)$

Si lo que quiere decir el texto es que le dio: 2602 2602 2602 2602 2602 entonces la conclusión sería que los datos son falsos pues son todos IGUALES

Bajo el supuesto de que los datos son éstos $\rightarrow \bar{X} = 2602$, $\underbrace{\mu = 2464}_{\bar{X} \text{ de a)}}$

$H_0: \mu = 2464$ vs $H_1: \mu < 2464$

$e_m = \dfrac{\bar{X} - 2464}{64,93} \sim N(0,1)$ bajo H_0.

Rechazo H_0 si $t_{obs} < t_{11,\,0.05}$

$t_{obs} = \dfrac{2602 - 2464}{64,93} = 2,12537$

$t_{11,\,0.05} = 1,796$

$t_{obs} > t_{11,\,0.05} \Rightarrow$ No rechazo H_0

No hay evidencia que indique que el promedio haya bajado en 5 años

② Se diseña un ascensor de carga cuyo límite es 1000 kg. El peso de cada caja sigue una distribución normal con un peso medio de 32 kg y un desvío estándar de 10 kg

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo de 30 cajas exceda el límite de carga?

X_i: "peso, en kg, de la i-ésima caja" $\qquad X_i \sim N(32, 10)$

Y: "peso de 30 cajas" $\rightarrow Y = \sum_{i=1}^{30} X_i \qquad Y \sim N(960, 10\sqrt{30})$

$\underset{\mu \cdot m}{32 \times 30}, \; \underset{\sigma \cdot \sqrt{m}}{10 \times \sqrt{30}}$

$$Z = \frac{Y-960}{10\sqrt{30}} \sim N(0,1)$$

$$P(Y > 1000) = 1 - P(Y \leq 1000) = 1 - P\left(\frac{Y-960}{10\sqrt{30}} \leq \frac{1000-960}{10\sqrt{30}}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}73029) = 1 - 0{,}7674 = \boxed{0{,}2326 = P(Y > 1000)}$$

b) Se toma una muestra aleatoria simple de 2 cajas ¿cuál es la probabilidad de que el mínimo de la muestra sea inferior a 30 kg?

$$p = P(X < 30) \overset{\text{continuidad}}{=} P(X \leq 30) = P\Big(\underbrace{\frac{X-32}{10}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{30-32}{10}\Big) = P(Z \leq -0{,}2) = \boxed{0{,}42074 = p}$$

W: "cantidad de cajas, de un grupo de 2, que pesan menos de 30 kg"

$$W \sim Bi(2; 0{,}4207)$$

$$P(W \geq 1) = 1 - P(W < 1) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - P(W=0) = 1 - \binom{2}{0} 0{,}4207^0 (1-0{,}4207)^2 =$$

$$= 1 - 0{,}3356 = 0{,}6644$$

$$\boxed{P(W \geq 1) = 0{,}6644}$$

PyE - UTN

12-12-18

(3) Sea X (mm) una v.a. que describe la profundidad de un disparo. Su función de densidad de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-1} & si \quad c \le x \le c+2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Indicar si los eventos $\overbrace{\{x / x > c+1\}}^{A}$ y $\overbrace{\{x \mid x < c+1{,}5\}}^{B}$ son independientes

$$1 = \int_{c}^{c+2} \frac{2}{x}\,dx = 2\ln(x)\Big|_{c}^{c+2} = 2\left[\ln(c+2) - \ln(c)\right] \rightarrow \ln(c+2) - \ln(c) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{c+2}{c}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{c+2}{c} = e^{1/2} \rightarrow 2 = ce^{1/2} - c = c\left(e^{1/2} - 1\right) \rightarrow \boxed{c = \frac{2}{e^{1/2} - 1}}$$

$$P(A) = \int_{c+1}^{c+2} \frac{2}{x}\,dx = \int_{\frac{2}{e^{1/2}-1}+1}^{\frac{2}{e^{1/2}-1}+2} \frac{2}{x}\,dx = 0{,}4381403928$$

$$P(B) = \int_{c}^{c+1{,}5} \frac{2}{x}\,dx = \int_{\frac{2}{e^{1/2}-1}}^{\frac{2}{e^{1/2}-1}+1{,}5} \frac{2}{x}\,dx = 0{,}7929038261$$

$$P(A \cap B) = \int_{c+1}^{c+1{,}5} \frac{2}{x}\,dx = \int_{\frac{2}{e^{1/2}-1}+1}^{\frac{2}{e^{1/2}-1}+1{,}5} \frac{2}{x}\,dx = 0{,}2310442188$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4381 \times 0{,}7929 = 0{,}3474 \neq 0{,}2310 \quad \therefore \boxed{\text{No son independientes}}$$

b) Si el diámetro de la perforación del disparo Y en mm se puede definir como $Y = 10X + 4$, hallar el valor esperado del diámetro

$$E(Y) = E(10X + 4) = E(10X) + E(4) = 10E(X) + 4 \overset{c.A}{=} 10 \times 2 + 4 = 24\,mm$$

$$\boxed{E(Y) = 24\,mm}$$

$$c.A.: \underbrace{E(X)}_{\int x f(x)\,dx} = \int_{c}^{c+2} \frac{2}{x} \cdot x\,dx = \int_{c}^{c+2} 2\,dx = 2(\cancel{c}+2-\cancel{c}) = 4 = E(X)$$

NOTA

4) La sig. información resultó de un estudio realizado para examinar la relación entre una medida de la corrosión del acero y la concentración de $NaPO_4$.

Y	Corrosión	7,68	6,95	6,30	5,75	5,01	1,43	0,93	0,72	0,68	0,65	0,56
X	$NaPO_4$	2,5	5,03	7,6	11,6	13,0	19,6	26,2	33,0	40,0	50,0	55,0

a) Estime el modelo lineal para explicar la corrosión conociendo el nivel de $NaPO_4$. Indique los supuestos del modelo

→ X es $NaPO_4$

$A = 6{,}735099$

$B = -0{,}142018$

→ $\boxed{Y = -0{,}1420\,X + 6{,}7351}$

Supuestos del modelo: que las muestras se hayan realizado bajo las mismas condiciones (tiempo y temperatura, por ejemplo)

b) Estime el coef. de determinación e interprételo en el contexto del problema.

coef. determinación: $r^2 = \dfrac{S_{xy}^2}{S_{xx}\,S_{yy}}$ $\quad n = 11$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{11} x_i y_i - \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i \sum_{i=1}^{11} y_i = 400{,}5225 - \frac{1}{11}\, 36{,}66 \times 263{,}53 = -477{,}75 = S_{xy}$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{11} x_i^2 - \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{11} x_i\right)^2 = 9677{,}4709 - \frac{1}{11}\, 69448{,}069 = 3364{,}01 = S_{xx}$$

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^{11} y_i^2 - \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{11} y_i\right)^2 = 209{,}7642 - \frac{1}{11}\, 1343{,}9556 = 87{,}5864 = S_{yy}$$

$$r^2 = \frac{228246{,}1309}{3364{,}01 \times 87{,}59} = 0{,}7746$$

Como $r^2 = 0{,}7746$, cercano al 1, entonces existe correlación en los datos. Con el modelo de regresión lineal se puede estimar la corrosión conociendo la concentración de $NaPO_4$

HOJA Nº PyE
FECHA 12-12-18

teórico 1

a) Defina eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes. Ejemplifique

Eventos independientes:

Dos eventos son independientes cuando la ocurrencia de uno no tiene efecto sobre la ocurrencia de otro evento. Por ejemplo: tirar una moneda dos veces

A y B son independientes $\iff P(A).P(B) = P(A \cap B)$

Eventos mutuamente excluyente:

Dos eventos son mutuamente excluyente cuando la ocurrencia de uno implica la imposibilidad de que ocurra el otro.
Por ejemplo: A: "la persona seleccionada es mujer"
B: "la persona seleccionada es hombre"

$$P(A \cap B) = 0$$

b) Demuestre que si dos eventos son independientes también lo son sus complementos

Hipótesis: A y B son independientes $\rightarrow P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

Dem: $\boxed{P(A^c \cap B^c)} \overset{\text{De Morgan}}{=} P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B) =$

$$= 1 - [P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{x hip.}}] =$$

$$= \underbrace{1 - P(A)}_{} - P(B) + P(A)\,P(B) =$$

complemento y factor común $= P(A^c) - P(B)\,(1 - P(A)) =$

compl $= P(A^c) - P(B)\,P(A^c) \overset{\text{fact. com.}}{=} P(A^c)\,[1 - P(B)] =$

compl $= \boxed{P(A^c) \cdot P(B^c)}$ que es la tesis.

NOTA

teórico 2

Defina la distribución exponencial, halle su valor esperado y explique la relación con la distribución de Poisson

V.A. Exponencial

Es una v.a. continua que mide un continuo entre dos éxitos

$X \sim \mathcal{E}(\lambda) \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$$E(X) = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} (\lambda x + 1) \Big|_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\Big[\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-\lambda x}}_{\to 0} (\lambda x + 1) - \underbrace{e^{-\lambda 0}}_{1} \underbrace{(\lambda 0 + 1)}_{1}\Big] = \boxed{\frac{1}{\lambda} = E(X)}$$

v.a. Poisson: mide la cantidad de éxitos en un continuo dado

La relación que existe entre una v.a. Exponencial y una Poisson es que la primera mide el tiempo hasta el sig. éxito, que sería una Poisson con 0 (cero) éxitos.